- Bulova algebra -

Bulova algebra

- Neka su u skupu $B=\{a,b,c,\ldots\}$ definisane sledeće operacije:
  - Unarna operacija "$\overline{}$ " (komplement) i
  - Binarne operacije "+" i "·"

  Tako da:

$$(\forall a)(a\in B)\,\overline{a}\in B$$

$$(\forall a)(\forall b)(a\in B, b\in B)\,a+b\in B$$

$$(\forall a)(\forall b)(a\in B, b\in B)\,a\cdot b\in B$$

Bulova algebra

- Skup B sa operacijama “ $\overline{}$ “, “+” i “·” predsavlja Bulovu algebru ako operacije zadovoljavaju aksiome Bulove algebre.

Aksiome Bulove algebre

1. Obe binarne operacije su asocijativne:

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$$

2. Obe binarne operacije su komutativne:

$$a+b=b+a$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Aksiome Bulove algebre

3. U skupu B postoje neutralni elemenati za sabiranje (0) i množenje (1):

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

4. Zakon komplementarnosti:

$$a + \overline{a} = 1$$

$$a \cdot \overline{a} = 0$$

Aksiome Bulove algebre

5. Obe binarne operacije su distributivne jedna u odnosu na drugu:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

Teoreme Bulove algebre

- Teoreme Bulove algebre su Bulove jednakosti koje se mogu dokazati korišćenjem aksioma.

Teoreme Bulove algebre

1. Dvostruka negacija:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

2. Zakon idempotencije

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

Teoreme Bulove algebre

3. U skupu B postoje “nulti” elementi za obe operacije (1 za operaciju “+”, “0” za operaciju “·”)

$$a + 1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

4. Pravila sažimanja

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$$

$$(a + b) \cdot (a + \overline{b}) = a$$

Teoreme Bulove algebre

5. Pravila apsorpcije

$$a + a \cdot b = a$$

$$a \cdot (a + b) = a$$

6. De Morganova pravila

$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Princip dualnosti

- Ako se Bulovom izrazu izvrši uzajamna zamena operacija “+” i “·” i konstanti 0 i 1, a simboli promenljivih i simbol negacije ostanu nepromenjeni, bobiće se dualni Bulov izraz.
- Princip dualnosti: Ukoliko se dokaže da je neki Bulov izraz istinit, istinit je i njemu dualan izraz.
- Posledica: Iz svakog para datih teorema dovoljno je dokazati samo jednu. (Druga je uvek dualna prvoj).

Dokazi teorema Bulove algebre

1. $\overline{\overline{a}} = a$

Ako se u aksiomi

$$a + \overline{a} = 1$$

$$a \cdot \overline{a} = 0$$

stavi $\overline{a}$ umesto a:

$$\overline{a} + \overline{\overline{a}} = 1$$

$$\overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} = 0$$

Primenom zakona komutativnosti dobijamo:

$$\overline{\overline{a}} + \overline{a} = 1$$

$$\overline{\overline{a}} \cdot \overline{a} = 0$$

odakle je:

$$\overline{\overline{a}} = a$$

Dokazi teorema Bulove algebre

6. $\overline{a+b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

Dokažimo najpre:

$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1$$

$$a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = (a + b + \overline{a}) \cdot (a + b + \overline{b}) =$$

$$(b + a + \overline{a}) \cdot (a + b + \overline{b}) = (b + 1) \cdot (a + 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Odavde sledi da je:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a+b}$$

Prekidačka algebra

- Prekidačka algebra je Bulova algebra na skupu od 2 elementa ($B=\{0,1\}$), pri čemu su operacije "‾", "+" i "·" definisane na sledeći način:

$-$	0	1
	1	0

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

- Ovako definisane operacije su, u stvari, logičke NE ($\neg$), ILI ($\vee$) i I ($\wedge$) operacije.